Analiza matematyczna I
Lista 5 (ciągłość funkcji)

Zad 1. Obliczyć granicę funkcji $f(x)$ w punkcie x_0, gdzie

$$a)\quad f(x)=\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1},\quad x_0=3, \qquad b)\quad f(x)=\frac{x^2-1}{2x^2+x-1},\quad x_0=1,$$

$$c)\quad f(x)=\frac{x^2-1}{2x^2-x-1},\quad x_0=1, \qquad d)\quad f(x)=\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16},\quad x_0=2,$$

$$e)\quad f(x)=\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1},\quad x_0=1, \qquad f)\quad f(x)=\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9},\quad x_0=3,$$

$$g)\quad f(x)=\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2},\quad x_0=4, \qquad h)\quad f(x)=\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^2}\right),\quad x_0=1,$$

$$i)\quad f(x)=\frac{\sin 5x}{3x},\quad x_0=0, \qquad j)\quad f(x)=\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x},\quad x_0=0.$$

Zad 2. Obliczyć granice:

$$a)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x-1}\right) \qquad b)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x} \qquad c)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}$$

$$d)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} \qquad e)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{x}, \qquad f)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}.$$

Zad 3. Obliczyć granice jednostronne funkcji $f(x)$ w punkcie x_0:

$$a)\quad f(x)=\frac{1}{x-3},\quad x_0=3, \qquad b)\quad f(x)=\frac{1}{3-x},\quad x_0=3,$$

$$c)\quad f(x)=\frac{1}{(3-x)^2},\quad x_0=3, \qquad d)\quad f(x)=\frac{1}{(3-x)^3},\quad x_0=3,$$

$$e)\quad f(x)=2^{\frac{1}{x-1}},\quad x_0=1, \qquad f)\quad f(x)=2^{\frac{1}{1-x}},\quad x_0=1,$$

$$g)\quad f(x)=\frac{x-2}{x^2-4},\quad x_0=-2, \qquad h)\quad f(x)=\frac{3}{9-x^2},\quad x_0=-3,$$

$$i)\quad f(x)=e^{\frac{-2}{x-3}},\quad x_0=3, \qquad j)\quad f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}},\quad x_0=0.$$

Zad 4. Na podstawie definicji Cauchy'ego wykazać ciągłość funkcji:

$$a)\quad f(x)=3x+5, \qquad b)\quad f(x)=-2x+1, \qquad c)\quad f(x)=7x, \qquad d)\quad f(x)=\sin x.$$

Zad 5. Zbadać ciągłość i sporządzić wykresy następujących funkcji

$$a)\quad f(x)=[x], \qquad b)\quad f(x)=x-[x], \qquad c)\quad f(x)=\operatorname{sgn} x, \qquad d)\quad f(x)=|\operatorname{sgn} x|,$$

$$e)\quad f(x)=\operatorname{sgn}(\sin x), \qquad f)\quad f(x)=e^{\frac{-1}{x^2}}\ \text{ dla }\ x\neq 0\ \text{ i }\ f(0)=0.$$

Zad 6. Wyznaczyć punkty nieciągłości funkcji (jeżeli istnieją) oraz sporządzić wykresy funkcji:

$$a)\quad f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{gdy } x\geq 0,\\ 2x+1, & \text{gdy } x<0,\end{cases}\qquad b)\quad f(x)=\begin{cases} 1+x^2, & \text{gdy } x\geq 0,\\ -x^2+1, & \text{gdy } x<0,\end{cases}$$

$$c)\quad f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{gdy } x\in(1,+\infty),\\ x, & \text{gdy } x\in(-\infty,1],\end{cases}\qquad d)\quad f(x)=\begin{cases} \sin x, & \text{gdy } x\geq 0,\\ x, & \text{gdy } x<0,\end{cases}$$

$$e)\quad f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & \text{gdy } x\in(-\infty,0),\\ (x-1)^2, & \text{gdy } x\in[0,2],\\ 4-x, & \text{gdy } x\in(2,+\infty),\end{cases}\qquad f)\quad f(x)=\begin{cases} 2^x, & \text{gdy } -1\leq x\leq 0,\\ -x+1, & \text{gdy } 0<x\leq 1,\\ \log x, & \text{gdy } 1<x\leq 2,\end{cases}$$

$$g)\quad f(x)=\begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{gdy } x\in(-\infty,0),\\ -1, & \text{gdy } x=0,\\ x^2-1, & \text{gdy } x\in(0,+\infty),\end{cases}\qquad h)\quad f(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{x-1}, & \text{gdy } x\in(-\infty,-1),\\ x^2+2x+2, & \text{gdy } x\in[-1,+\infty),\end{cases}$$

$$i)\quad f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{gdy } x\geq 0,\\ -x^3, & \text{gdy } x<0,\end{cases}\qquad j)\quad f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{gdy } x\leq 0,\\ e^x, & \text{gdy } x>0,\end{cases}$$

$$k)\quad f(x)=\begin{cases} \frac{x-2}{x^2-5x+6}, & \text{gdy } x\in\mathbb{R}\setminus\{2,3\},\\ 1, & \text{gdy } x=2,\\ -1, & \text{gdy } x=3,\end{cases}\qquad l)\quad f(x)=\begin{cases} -x^2-4x-4, & \text{gdy } x<0,\\ 0, & \text{gdy } x=0,\\ 2x-4, & \text{gdy } x>0.\end{cases}$$

Zad 7. Funkcja $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$ nie jest określona przy $x=1$. Jaka powinna być wartość $f(1)$, żeby uzupełniona o tę wartość funkcja była ciągła w punkcie $x=1$?

Zad 8. Dla jakiej wartości $a\in\mathbb{R}$, funkcja f jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$a)\quad f(x)=\begin{cases} (x+a)^2, & \text{gdy } x\in(-\infty,0],\\ -x+1, & \text{gdy } x\in(0,+\infty),\end{cases}\qquad b)\quad f(x)=\begin{cases} \ln x, & \text{gdy } x\in[1,+\infty),\\ 2(x-a), & \text{gdy } x\in(-\infty,1),\end{cases}$$

$$c)\quad f(x)=\begin{cases} e^x+a, & \text{gdy } x\in(0,+\infty),\\ -x^2-x, & \text{gdy } x\in(-\infty,0],\end{cases}\qquad d)\quad f(x)=\begin{cases} 5^{1-x}, & \text{gdy } x\leq 0,\\ a, & \text{gdy } x>0,\end{cases}$$

$$e)\quad f(x)=\begin{cases} \frac{a^2\operatorname{arctg} 2x}{6x}, & \text{gdy } x\neq 0,\\ 3, & \text{gdy } x=0,\end{cases}\qquad f)\quad f(x)=\begin{cases} \frac{a\sin x}{x-\pi}, & \text{gdy } x\neq\pi,\\ x, & \text{gdy } x=\pi.\end{cases}$$